

АСПАН МЕХАНИКАСЫ

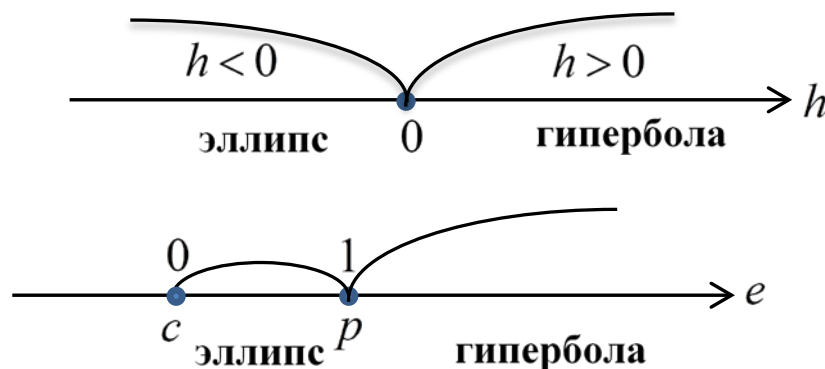
*Дәріскер
ф.-м.ғ.к., асс.профессор Алимгазина Н.Ш.*

4-дәріс. Эллипстік, гиперболалық, параболалық, шеңберлік және түзусызықты қозғалыс

2.1.5 Екі дене есебіндегі қозғалыстың классификациясы

Шеңберлік және эллипстік қозғалыстар – финитті қозғалыстар (қозғалыс жазықтықтың шектеулі аймағында болады), жалпы энергияның мәні «-» болады – тартылыс центрдің гравитациялық әсерінен шығу үшін кинетикалық энергияның мәні жеткіліксіз болу керек.

Параболалық және гиперболалық қозғалыстар – инфинитті қозғалыстар, жалпы энергия 0-ден жоғары және қозғалатын нүкте тартылыс күшіне қарамастан шексізге кетеді.



6 сурет – Кеплер қозғалысының түрлері

Шеңберлік жылдамдық $V_c = \sqrt{\mu/r}$ және параболалық жылдамдық $V_p = \sqrt{2\mu/r}$ арқылы бірінші және екінші ғарыштық жылдамдықтырын анықтауға болады. Егер r арақашықтықты R - орталық дененің радиусы және H - ұшу биіктігі арқылы, ал μ – гравитациялық тұрақтысын - дененің радиусы мен оның бетіндегі ауырлық күшінің үдеуі (g) арқылы ауыстырсақ

$$V_c = \sqrt{\frac{gR^2}{R+H}}, \quad V_p = \sqrt{\frac{2gR^2}{R+H}}, \quad (2.37)$$

сонда $H=0$ жағдайда *бірінші және екінші ғарыштық жылдамдықтары*

$$V_1 = \sqrt{gR}, \quad V_2 = \sqrt{2gR}. \quad (2.38)$$

2 кесте.

Қозғалыстың түрі	e	c	λ	h	V, r	$\delta = (r, V)$
Шеңберлік	0	$\neq 0$	0	$-\mu/r$	$V^2 = \mu/r$	90°
Эллипстік	$0 < e < 1$	$\neq 0$	$< \mu$	$-\mu/a$	$V^2 < 2\mu/r$	$0^\circ < \delta \leq 180^\circ$
Параболалық	1	$\neq 0$	μ	0	$V^2 = 2\mu/r$	$0^\circ < \delta \leq 180^\circ$
Гиперболалық	> 1	$\neq 0$	$> \mu$	μ/a	$V^2 > 2\mu/r$	$0^\circ < \delta \leq 180^\circ$
Түзусызықты	1	0	кез келген	кез келген	кез келген	0° немесе 180°

2.2 Кеплер қозғалысының арнайы түрлері

Екі дене есебінде қозғалыстың түрлері:

- ✓ Негізгі - эллипстік және гиперболалық;
- ✓ Шектеулі – шеңберлік және параболаалық;
- ✓ Нұқсанды – түзусызықты қозғалыс.

2.2.1 Эллипстік қозғалыс

Егер бірінші интегралдардың тұрақтылары $c \neq 0$, $0 < \lambda < \mu$, $h < 0$, $p \neq 0$, $0 < e < 1$ мәндерге ие болса - эллипстік қозғалыс болады.

Екі дене есебін шешу үшін шын аномалиямен уақыттың байланысы осы интеграл арқылы анықталады

$$\int_0^v r^2 dv = c(t - \tau). \quad (2.39)$$

Интегралды шешу үшін тағы негізгі параметрлерді еңгізу қажет.

Эллипстік орбитаның a - үлкен жарты осіне радиусы тең шеңберді сызамыз және орбита бойымен қозғалатын дененің сол кездегі орналасу нүктесінен эллипстің үлкен жарты осіне перпендикуляр өткізгенде **E - эксцентрлік аномалия** анықталады. **Эксцентрлік аномалия E** дегеніміз эллипстің үлкен жарты осі және перпендикулярдың шеңбермен қиылысу нүкте бағыты арасындағы бұрыш (10 сурет). E қозғалыс бағытында 0° ден 360° арасында өлшенеді.

Сонда

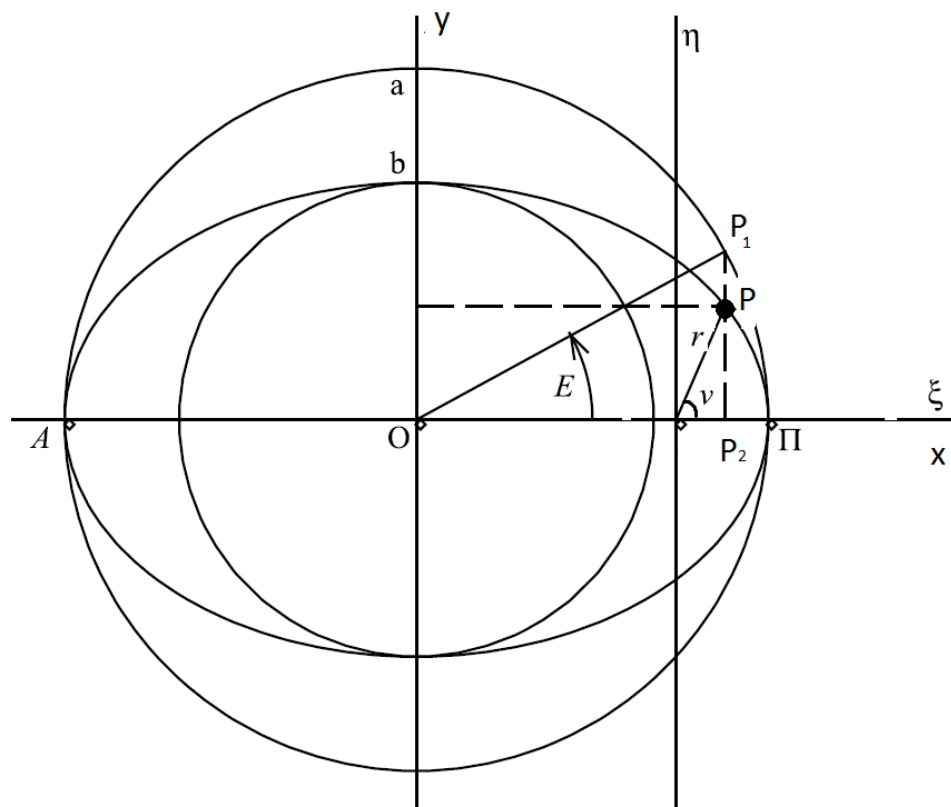
$$a \cos E = ae + r \cos \nu. \quad (2.40)$$

Егер $\frac{y_c}{y_e} = \frac{a}{b}$ және $r \sin \nu = a\sqrt{1-e^2} \sin E$ болса, дененің орбиталдық координаттары:

$$\begin{aligned} \xi &= r \cos \nu = a(\cos E - e), \\ \eta &= r \sin \nu = a\sqrt{1-e^2} \sin E, \end{aligned} \quad (2.41)$$

және радиус-векторы

$$r = a(1 - e \cos E). \quad (2.42)$$



6 сурет – Эксцентрлік аномалия

Егер

$$\cos \nu = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}, \quad \sin \nu = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{1 - e \cos E}, \quad (2.43)$$

болса, шын және эксцентрлік аномалиялар арасындағы байланысы

$$\operatorname{tg} \nu = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}. \quad (2.44)$$

(2.43) дифференциалдаған кезінде

$$d\nu = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos E} dE. \quad (2.45)$$

(2.42) мен (2.45)-ті (2.39)-ші формулада ескерген кезде

$$\int_0^E (1-e\cos E) dE = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} (t-\tau) \quad (2.46)$$

немесе

$$E - e \sin E = n(t-\tau). \quad (2.47)$$

Осында $n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}$ - эллипстік орбита бойымен қозғалатын дененің орташа бұрыштық жылдамдығы немесе орташа қозғалыс деп аталады. (2.47) формула - эллипстік қозғалыс кезіндегі екі дене есебінің шешімі – ***Кеплер теңдеуі***.

Егер M – *орташа аномалия* болса және

$$M = n(t - \tau), \quad (2.48)$$

сонда (2.47)

$$E - e \sin E = M. \quad (2.49)$$

Егер a радиусы бар шеңбер арқылы кез келген нүкте тұрақты жылдамдылығымен қозғалса, және бір уақытта аспан денесімен бірге перицентр арқылы өтетін болса, сонда осы нүктенің радиус-векторы және перицентр бағыты арасындағы бұрыш M - *орташа аномалия* болады. M аспан денесінің қозғалыс бағытына қарай 0° дан 360° өлшенеді.

Эллипстік қозғалысында энергия тұрақтысы

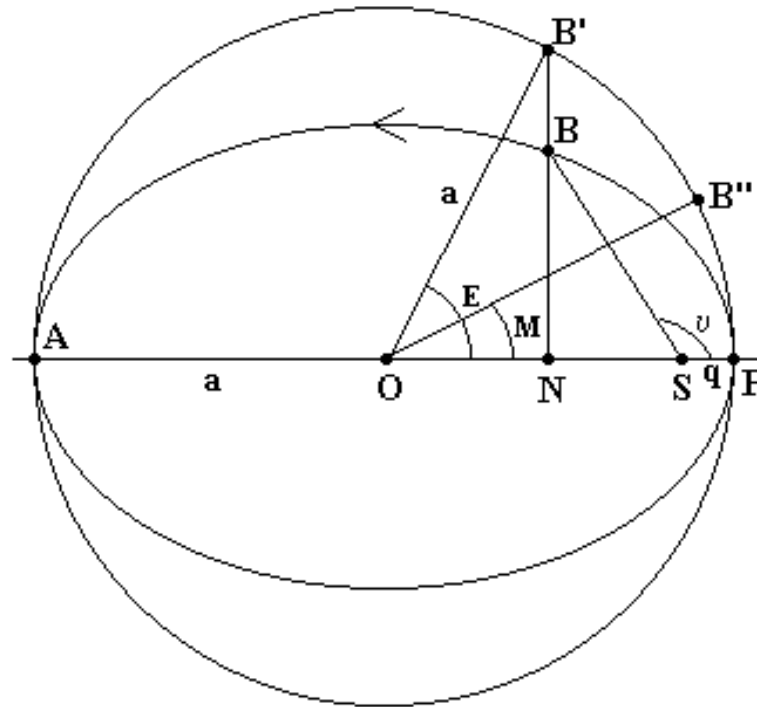
$$h = \frac{\lambda^2 - \mu^2}{c^2} = \mu \frac{e^2 - 1}{p} = -\frac{\mu}{a}, \quad p = \frac{c^2}{\mu}, \quad e = \frac{\lambda}{\mu}. \quad (2.50)$$

Эллипстік орбита бойымен қозғалатын материалдық нүктенің айналу периоды

$$T = 2\pi \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} = 2\pi \frac{a^{3/2}}{\sqrt{G(m_0 + m)}}. \quad (2.51)$$

Осыдан жалпыландырылған Кеплердің үшінші заңы

$$\frac{T^2}{a^3}(m_0 + m) = \frac{4\pi^2}{G} = \text{const.} \quad (2.52)$$



S – эллипстің фокусы, O – эллипстің центрі, P - перицентр, A - апоцентр, $\omega = |SP|$ - перицентрлік арақашықтық, $a = |OA|$ - эллипстің үлкен жарты осі

6 сурет – Орташа аномалия

Сонда екі дене есебінің шешімі бойынша эллипстік орбита бойымен қозғалатын нүктенің координаттары

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \left[\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \cdot (\cos E - e) + \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} \cdot \sqrt{1 - e^2} \cdot \sin E \right] \quad (2.53)$$

және жылдамдық компоненттері

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \frac{na^2}{r} \left[- \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \cdot \sin E + \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} \cdot \sqrt{1 - e^2} \cdot \cos E \right]. \quad (2.54)$$

Энергия сақталу заңынан эллипстік қозғалыс кезіндегі жылдамдықтың модулі

$$V^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (2.55)$$

немесе

$$V^2 = \frac{\mu}{a} \cdot \frac{1 + e \cos E}{1 - e \cos E}. \quad (2.56)$$

Эллипстік қозғалыс кезінде кейбір параметрлерді басқаларымен ауыстырады: *перицентрлік арақашықтықты – перицентрдің бойлығымен ауыстырады*

$$\pi = \Omega + \omega, \quad (2.57)$$

τ - *перицентр арқылу өту моментін – t_0 - бастапқы дәуірдегі M_0 - орташа аномалиямен; M_0 – бастапқы дәуірдегі орташа бойлығымен*

$$\varepsilon = \pi + M_0 = \Omega + \omega + M_0. \quad (2.58)$$

Сонда эллипстік қозғалыс кезіндегі *эллипстік кеплер элементтері* - $\Omega, \pi, i, e, a, \varepsilon$.

3 кесте. Үлкен планеталардың негізгі орбита элементтері

Планета	a	T	S	n	i	e	Ω	π	M_0
Меркурий	0,387	0,240	116	4,09°	7,00°	0,206	48°	77°	252°
Шолпан	0,723	0,615	584	1,60°	3,40°	0,007	77°	131°	182°
Жер	1,000	1,000	-	0,99°	0,00°	0,17	-	103°	100°
Марс	1,524	1,881	780	0,524°	1,85°	0,093	49°	336°	335°
Юпитер	5,203	11,86	399	0,083°	1,30°	0,048	100°	14°	32°
Сатурн	9,555	29,54	378	0,034°	2,48°	0,056	113°	93°	50°
Уран	19,218	84,25	370	0,012°	0,76°	0,047	74°	173°	314°
Нептун	30,110	165,2	368	0,006°	1,77°	0,009	132°	48°	304°
Плутон	39,53	250,1	367	0,004°	17,50°	0,250	110°	223°	130°

4 кесте. Кейбір кіші планеталардың негізгі орбита элементтері

Планета	a	T	S	n	i	e	Ω	π	M_0
Церера	2,78	4,60	467	0,214°	10,6°	0,077	81°	152°	8°
Паллада	2,77	4,61	467	0,214°	34,8°	0,235	173°	123°	355°
Юнона	2,67	4,36	474	0,226°	13,0°	0,257	171°	57°	243°
Веста	2,36	3,63	504	0,272°	7,1°	0,090	104°	254°	341°
Икар	43,19	283,82	366	0,003°	17,2°	0,051	273°	10°	87°
Варуна	39,43	247,61	367	0,004°	19,8°	0,241	71°	11°	262°

3 және 4 кестелерде үлкен мен кіші планеталардың орбита элементтерінің мәндері көрсетілген (белгіленулер: a – үлкен жарты осі, а.б.; T – сидерикалық период, жылдар; S – синодикалық период, тәулік; n – тәулік бойынша орташа қозғалыс, градус; e – эксцентриситет; i – эклиптикаға еңкею, градус; Ω – түйіннің бойлығы, градус; π – перигелийдің бойлығы, градус; M_0 – орташа аномалия (2000 дәуір), градус).

2.2.2 Гиперболалық қозғалыс

Егер бірінші интегралдардың тұрақтылары $c \neq 0, \lambda > \mu, h > 0, p \neq 0, e > 1$ мәндерге ие болса *гиперболалық қозғалыс* болады.

Эллипстік және гиперболалық қозғалыстардың бір бірінен айырмашылығы көп болса да, олардың қозғалысын сипаттайтын теңдеулердің құрылымы ұқсас екенін байқалады. Сондықтан эллипстік теңдеулерде осындай өзгерістер еңгіземіз:

$$\sin E \rightarrow shH, \cos E \rightarrow chH, tgE \rightarrow thH,$$

осында H - өлшемі жоқ айнымалы шама, $-\infty$ -ден $+\infty$ дейін өзгереді. Сонда, шын аномалиямен H шаманың байланысы

$$tg \nu = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} th \frac{H}{2}. \quad (2.59)$$

Гиперболалық қозғалыс үшін Кеплер теңдеуінің аналогы

$$e \cdot chH - H = n(t - \tau). \quad (2.60)$$

Орбиталдық координаттар (a – гиперболааның жарты осінің нақты мәні)

$$\begin{aligned}\xi &= a(e - chH), \\ \eta &= a\sqrt{e^2 - 1} \cdot shH, \\ r &= a(e \cdot chH - 1).\end{aligned}\tag{2.61}$$

Қозғалыс жылдамдығы

$$V^2 = \mu \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right) = \frac{\mu}{a} \cdot \frac{e \cdot chH + 1}{e \cdot chH - 1}.\tag{2.62}$$

Егер материалдық нүкте гипербола бойымен шексізге ұмтылса, оның жылдамдығы

$$V = \sqrt{\frac{\mu}{a}}\tag{2.63}$$

бұл теңдеу жылдамдықтың *гиперболаалық артығы* деп аталады.

Сонда екі дене есебінің шешімі бойынша гиперболаалық орбита бойымен қозғалатын нүктенің координаттары

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \left[\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \cdot (e - chH) + \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} \cdot \sqrt{e^2 - 1} \cdot shH \right].\tag{2.64}$$

2.2.3 Шеңберлік қозғалыс

Егер $c \neq 0, \lambda = 0, h < 0, p \neq 0, e = 0$ болса, сол кезде екі дене есебіндегі қарапайым қозғалыстың түрі - **шеңберлік қозғалыс** болады. Тек шеңберлік қозғалыс үшін қозғалыстағы дененің жылдамдығының координаттары мен компоненттері айқын уақыт функцияларымен анықталады. Осы қозғалыста перицентр және апоцентр сипаттамалары болмайды, сондықтан ω - перицентрлік арақашықтықтың мағынасы болмайды.

Шеңберлік орбитада дененің орналасу бұрышын орбитаның **жоғары (солтүстік) түйіннен** есептеуге болады. Сол кезде ν - шын аномалия бір жағынан u - ендік аргуменімен, екінші жағынан E - эксцентрлік аномалиямен және M - орташа аномалиямен сәйкес келеді. Орбитаның векторлық элементтерінің мағынасы болмайды.

Шеңберлік қозғалыс орбитаның төрт элементтерімен анықталады:

r - орбитаның радиусы,

Ω - бұрыштың бойлығы,

i - орбита еңкеюі,

τ - материалдық нүктенің жоғары түйін арқылы өту мерзімі (немесе t_0 - бастапқы дәуіріндегі M_0 - орташа аномалия).

Аспан денесі шеңберлік орбита бойымен қозғалса ($r = p = a$), бастапқы тікбұрышты координаттары

$$\begin{aligned}x &= a(\cos \Omega \cos M - \sin \Omega \sin M \cos i), \\y &= a(\sin \Omega \cos M - \cos \Omega \sin M \cos i), \\z &= a \sin M \sin i,\end{aligned}\tag{2.65}$$

мен орбиталдық тікбұрышты координаттары және жылдамдық компоненттері:

$$\begin{aligned}\xi &= a \cos M, & \dot{\xi} &= -an \sin M, \\ \eta &= a \sin M, & \dot{\eta} &= an \cos M,\end{aligned}\tag{2.66}$$

осында

$$M = n(t - \tau) = n(t - t_0) + M_0, \quad n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{\frac{3}{2}}}\tag{2.67}$$

n - қозғалыстың тұрақты бұрыштық жылдамдық.

(2.67) формула арқылы шеңберлік қозғалыс үшін Кеплердің үшінші заңын және қозғалыстың сызықты жылдамдығын анықтауға болады

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} r^{\frac{3}{2}}, \quad V = \sqrt{\frac{\mu}{r}}\tag{2.68}$$

Табиғатта әрдайым ұйытқу факторлары аспан денесінің қозғалысына әсеретеді. Сондықтан шеңберлік қозғалыс табиғатта болмайды, оны бірақ эксцентриситеті төменгі эллипстік қозғалыстың қарапайым жуықтауы ретінде қарастырады.

2.2.4 Параболалық қозғалыс

Егер бірінші интегралдардың тұрақтылары $c \neq 0$, $\lambda = \mu$, $h = 0$, $p \neq 0$, $e = 1$ мәндерге ие болса **параболалық қозғалыс** болады.

Қозғалыс заңы

$$\int_0^v \frac{dv}{(1 + \cos v)^2} = \frac{\sqrt{\mu}}{p^{3/2}} (t - \tau). \quad (2.69)$$

Егер

$$\cos v = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{v}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{v}{2}}, \quad (2.70)$$

болса

$$\int_0^v \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{v}{2}\right) \sec^2 \frac{v}{2} dv = \frac{\sqrt{\mu}}{p^{3/2}} (t - \tau). \quad (2.71)$$

p - орбита параметрінің орнына $2q$ (q – параболаның төбесінен фокусқа дейін арақашықтық немесе *парабола үшін перицентрлік арақашықтық*) және $\sigma = \operatorname{tg}\left(\frac{v}{2}\right)$ теңдеуге енгізгенде, интегралдын шешімі – **Баркер теңдеуі**

$$\sigma^3 + 3\sigma - 3n(t - \tau) = 0, \quad (2.72)$$

осында

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{2}} q^{-3/2}. \quad (2.73)$$

Орбита тендеуіне енгізгенде

$$r = q(1 + \sigma^2),$$

және егер

$$\sin \nu = \frac{2tg \frac{\nu}{2}}{1 + tg^2 \frac{\nu}{2}},$$

болса, орбиталды координаттар:

$$\begin{aligned}\xi &= r \cos \nu = q(1 - \sigma^2), \\ \eta &= r \sin \nu = 2q\sigma.\end{aligned}\tag{2.74}$$

және бастапқы тікбұрышты координат жүйесінің координаттары

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = q \left[\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \cdot (1 - \sigma^2) + 2 \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} \cdot \sigma \right].\tag{2.75}$$

Параболалық қозғалыс кезіндегі жылдамдықтың модулі

$$V^2 = \frac{2\mu}{r}.\tag{2.76}$$

Табиғатта ұйытқулар болғандықтан, параболалық қозғалыс болу мүмкін емес. Бірақ эллипстік және гиперболаалық қозғалыс кезінде эксцентриситетін мәні 1-ге жақындаса осы қозғалысты қарастырады. Мысалы кометалардың қозғалысы.

2.2.5 Түзусызықты қозғалыс

Егер бірінші интегралдардың тұрақтылары $c = 0, \lambda = \mu, h \neq 0, p = 0, e = 1$ мәндерге ие болса **түзусызықты қозғалыс** болады.

Орбитаның сызығы координат басы нүктесінен өтеді, өйткені $\vec{r} \updownarrow \dot{\vec{r}}$. Бағыттау векторы ретінде бастапқы вектор $\vec{r}_0$ алынады.

Осы жағдайда векторлық теңдеу

$$\vec{r}_0 \times \vec{r} = 0,$$

және скалярлық теңдеулер

$$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0}. \quad (2.77)$$

Сонда

$$V^2 = \dot{r}^2$$

және энергия интегралын табу арқылы осы траекторияның қозғалыс заңын анықтауға болады.

Интегралдың шешімін қарапайым жолымен анықтау үшін берілген шамаларды басқа шамаларымен ауыстырамыз

$$\sqrt{|h|}dt = \sqrt{\mu/a}dt = rd\eta, \quad (2.78)$$

осында

$$a = \mu/|h|,$$

η - жаңа өлшемі жоқ айнымалы шама. Сонда

$$\eta = \int \frac{dr}{\sqrt{2ar + \text{sign}(h) \cdot r^2}}. \quad (2.79)$$

$r_0 = 0$ кезінде келесі шамаларды анықтауға болады

$$\begin{aligned} a(1 - \cos \eta), & \quad h < 0, \\ r = \frac{a}{2} \eta^2, & \quad h = 0, \\ a(ch\eta - 1), & \quad h > 0. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Осы жағдайда t уақыт η аргументімен осындай байланыста болады

$$\begin{aligned} \eta - \sin \eta, & \quad h < 0, \\ \frac{\eta^3}{6} = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} (t - t_0), & \quad h = 0, \\ sh\eta - \eta & \quad h > 0. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Егер $e \rightarrow 1$, $a = \text{const}$ болса η - эксцентрілік аномалияның және оның гипербодалық аналогының шектеулі мәні болады. (2.81)-дің бірінші және үшінші қатынастары – Кеплер тендеуінің және оның гипербодалық аналогының шектеулі формалары. a - эллипстің үлкен жартылай осінің немесе гиперболаның нақты жартылай осінің шектеулі мәні. Егер $h < 0$ болса, $a = \max(r)$. Осы тендеулер Ньютонның тартылыс өрісіндегі бір материалдық нүктенің қозғалысын және сфера-симметриялық шаңды бұлттың эволюциясын сипаттайды.